

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a IX-a**

**1.** Pe un bulevard sunt 100 de felinare, numerotate 1, 2, ..., 100. Inițial, pentru decor, felinarele 1, 4, 7, ... (la fel în continuare) sunt cu lumină galbenă iar restul cu lumină albă. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, începând de la felinarul 100 și în sens descrescător din doi în doi, la fiecare felinar întâlnit se adaugă un filtru albastru. Astfel, datorită proprietății culorilor derivate, o parte din felinare rămân cu lumină albă, o parte rămân cu lumină galbenă, o parte devin cu lumină albastră (alb + albastru = albastru) iar o parte devin cu lumină verde (galben + albastru = verde). Aflați câte din cele 100 de felinare vor fi din fiecare culoare.

**Soluție:**

Inițial sunt galbene felinarele cu numerele de ordine 1, 4, 7, ..., 97, 100, adică cele cu numerele de forma  $3k + 1$ , cu  $k \in \{0; 1; 2; \dots; 33\}$ , în număr total de 34 felinare ..... **1p**

Filtrul albastru se aplică felinarelor 100, 98, 96, ..., 4, 2, deci la toate cu numărul de ordine par, în număr total de 50 felinare ..... **1p**

Dintre felinarele inițial galbene au număr de ordine par cele cu numărul de ordine  $3k + 1$  și care au  $k$  impar, adică cele cu  $k \in \{1; 3; 5; 7; \dots; 33\}$ , în număr total de 17 felinare ..... **1p**

Deci **exact 17 felinare** - care inițial au fost galbene - vor deveni **verzi** ..... **1p**

Cum  $34 - 17 = 17$ , restul de **17 felinare rămân galbene** ..... **1p**

Cum  $50 - 17 = 33$ , restul de **33 felinare vor deveni albastre** ..... **1p**

Cum  $100 - (17 + 17 + 33) = 33$ , restul de **33 felinare rămân cu lumină albă** ..... **1p**

**2.** O sală de spectacol are locurile dispuse pe rânduri și pe fiecare rând, începând cu al doilea, se află cu câte două locuri mai multe decât pe rândul precedent. Știind că pe primul rând sunt 38 de locuri, și în total sala are 2010 locuri, aflați pe câte rânduri sunt dispuse locurile în acea sală.

**Soluție**

Fie  $a_1$  numărul de locuri de pe primul rând,  $a_2$  numărul de locuri de pe al doilea rând și așa mai departe ..... **1p**

Conform cu cele descrise vom avea  $a_1 = 38$ ,  $a_2 = 40$ ,  $a_3 = 42$ , etc. .... **1p**

Deci  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sunt în progresie aritmetică cu primul termen  $a_1 = 38$  și rația  $r = 2$  ..... **1p**

Fie  $n \in \mathbb{N}$  numărul rândurilor sălii și conform enunțului  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2010$ , ceea ce

înseamnă  $\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 2010$  ..... **1p**

cu  $a_1 = 38$  și  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 2n + 36$  ..... **1p**

Se obține ecuația  $n^2 + 37n - 2010 = 0$  ..... **1p**

ecuație care are soluția naturală  $n = 30$ , deci **sala are 30 de rânduri** ..... **1p**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**3.** Pentru fiecare  $a \in \mathbb{R}$  se consideră ecuația  $x^2 - 2x + (2011 - a) = 0$ , notată  $E(a)$ .

- Determinați valorile  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $E(a)$  are rădăcini reale;
- Determinați suma și produsul rădăcinilor ecuației  $E(a)$ ;
- Determinați valorile  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $E(a)$  are ambele rădăcini numere naturale.
- Determinați valorile  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $E(a)$  are ambele rădăcini numere raționale.

**Soluție:**

- $E(a) \Leftrightarrow (x-1)^2 = a-2010$ , deci  $E(a)$  are rădăcini reale  $\Leftrightarrow a \geq 2010$ ,  
sau rezolvare prin condiția  $\Delta \geq 0$  ..... **1p**
- $x_1 + x_2 = 2$  ..... **1p**  
și  $x_1 \cdot x_2 = 2011 - a$  ..... **1p**
- Din  $x_1 + x_2 = 2$  și  $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$  se obține  $(x_1; x_2) = (0; 2)$ , în cazul  $a = 2011$  ..... **1p**  
și  $(x_1; x_2) = (1; 1)$ , în cazul  $a = 2010$  ..... **1p**
- Din  $(x-1)^2 = a-2010 = k^2$ ,  $k \in \mathbb{Q}$ , ..... **1p**  
rezultă  $a = k^2 + 2010$ ,  $k \in \mathbb{Q}$  ..... **1p**

**4.** O foaie de tablă este de forma unui triunghi  $ABC$  dreptunghic în  $A$  și cu  $m(\angle ACB) = 36^\circ$ . Se trasează pe foaie segmentele  $[AM]$ , cu  $M \in (BC)$  încât  $CM = AC$  și apoi  $[BN]$  cu  $N \in (AC)$  încât  $AN = BM$ . Să se demonstreze că:

- dacă se notează  $AM \cap BN = \{P\}$ , punctul  $P$  este mijlocul segmentului  $[BN]$ ;
- dacă se taie foaia după segmentele  $[AM]$  și  $[BN]$ , se obțin trei triunghiuri isoscele.

**Soluție:**

Conform cu figura, din aplicarea teoremei lui Menelaus, avem  $\frac{BP \cdot AN \cdot CM}{PN \cdot AC \cdot MB} = 1$ , pentru  $\triangle BNC$  și

punctele coliniare A, P, M ..... **1p**

Se obține  $BP = PN$  ..... **1p**

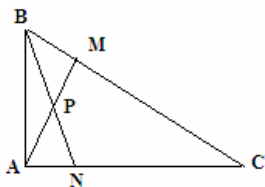
Deoarece  $AP$  este mediană în triunghi dreptunghic, este jumătate din ipotenuză ..... **1p**

Astfel triunghiurile  $PAB$  și  $PAN$  sunt isoscele. .... **1p**

Din triunghiul isoscel  $CAM \Rightarrow m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{CMA}) = 72^\circ$  ..... **1p**

Obținem  $m(\widehat{BMP}) = 108^\circ, m(\widehat{ABC}) = 54^\circ, m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{ABP}) = 18^\circ$  .... **1p**

$m(\angle MBP) = 36^\circ = m(\angle MPB)$  (unghi exterior  $\triangle PAB$ ) ..... **1p**



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a X-a**

**1. Rezolvați ecuațiile :**

a)  $\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2, x \in \mathbb{R}$

b)  $4^x - 9^x = 10^x - 15^x, x \in \mathbb{R}$

**Soluție:**

a) Condiții necesare:  $x+3 > 0, x-3 > 0$  și  $x-3 \neq 1$  ..... **1p**

$\log_3(x+3) \cdot \log_{x-3} 3 = 2 \Leftrightarrow \log_3(x+3) \cdot \frac{1}{\log_3(x-3)} = 2 \Leftrightarrow \log_3(x+3) = \log_3(x-3)^2$  ..... **1p**

$x+3 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$  cu  $x_1 = 1$  (respinsă de  $x-3 > 0$ ),  $x_2 = 6$  soluție unică ..... **1p**

b)  $4^x - 9^x = 10^x - 15^x \Leftrightarrow (2^x - 3^x)(2^x + 3^x - 5^x) = 0$  ..... **1p**

$2^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow$  Soluție  $x = 0$  ..... **1p**

$2^x + 3^x - 5^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$  ..... **1p**

Soluție unică  $x = 1$ , deoarece  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$  strict monotonă ..... **1p**

**2. Fie  $\mathbb{C}$  mulțimea numerelor complexe, atunci:**

a) Demonstrați că pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ , dacă  $\bar{z} = z$  atunci  $z$  este număr real ( $\bar{z}$  este conjugatul complex al numărului complex  $z$ );

b) Demonstrați că pentru orice două numere  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ ,  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  și

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

c) Demonstrați că pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z + \bar{z}$  și  $z \cdot \bar{z}$  sunt numere reale;

d) Dacă  $z = \frac{2010 + 2011i}{2011 + 2010i}$  arătați că  $z \cdot \bar{z} = 1$  și  $\bar{z}(z^2 + 1) \in \mathbb{R}$

**Soluție:**

a)  $z = a + ib, \bar{z} = a - ib$  și atunci  $\bar{z} = z \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z$  este număr real ..... **1p**

b)  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  ..... **1p**

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) = \dots = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$  ..... **1p**

analog  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  ..... **1p**

c)  $\overline{(z + \bar{z})} = \bar{z} + \bar{\bar{z}} = \bar{z} + z = (z + \bar{z})$ , deci  $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$  ..... **1p**

analog  $\overline{z \cdot \bar{z}} \in \mathbb{R}$  ..... **1p**

d) se verifică  $z \cdot \bar{z} = 1$  și atunci  $\bar{z}(z^2 + 1) = \bar{z} \cdot z^2 + \bar{z} = (\bar{z} \cdot z) \cdot z + \bar{z} = z + \bar{z} \in \mathbb{R}$  ..... **1p**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**3.** Într-o populație de șorice 25% sunt albi iar restul sunt negri. Printre cei albi 50% sunt cu ochi albaștri iar dintre cei negri doar 20% au ochi albaștri. Dacă 99 de șorice au ochi albaștri, aflați câți șorice sunt în total.

**Soluție:**

Fie  $x$  numărul total de șorice ..... **1p**

Atunci  $25\% (x) = \frac{x}{4}$  sunt albi ..... **1p**

și  $75\% (x) = \frac{3x}{4}$  sunt negri ..... **1p**

dintre șoriceii albi  $50\% \left( \frac{x}{4} \right) = \frac{x}{8}$  au ochi albaștri ..... **1p**

dintre șoriceii negri  $20\% \left( \frac{3x}{4} \right) = \frac{3x}{20}$  au ochi albaștri ..... **1p**

$\frac{x}{8} + \frac{3x}{20} = 99$  ..... **1p**

$x = 360$  ..... **1p**

**4.** Un experiment de biochimie cercetează comportamentul unui mediu la o variație tipică de temperatură, pe durate de 10 secunde. Pe parcursul unei desfășurări a experimentului un termostat reglează temperatura mediului cercetat în funcție de factorul *moment*, astfel ca la fiecare moment  $t \in [0; 10]$  temperatura mediului cercetat să fie  $T(t) = \left[ \sqrt{t^2 - 6t + 81} \right]$  grade, în care  $[m]$  înseamnă

partea întreagă a numărului  $m$ . (Spre exemplu  $\left[ \sqrt{76} \right] = 8$  deoarece  $\sqrt{76} \in [8; 9)$ ).

- Aflați temperatura mediului la momentul de început și la momentul final al experimentului;
- Aflați dacă pe parcursul experimentului se mai înregistrează măcar încă o dată temperatura de la momentul de început și în caz afirmativ determinați un astfel de moment;
- Demonstrați că termostatul nu permite scăderea temperaturii mediului sub valoarea de 8 grade;
- Determinați temperatura maximă pe care o atinge mediul pe parcursul experienței;
- Demonstrați că temperatura maximă este atinsă doar la un singur moment al experimentului.

**Soluție**

a)  $T(0) = \left[ \sqrt{81} \right] = 9$  grade și  $T(10) = \left[ \sqrt{121} \right] = 11$  grade la final ..... **1p**

b)  $T(t) = \left[ \sqrt{t(t-6) + 81} \right]$ ;  $T(0) = T(6)$ , deci aceeași temperatură este la  $t = 6$  ..... **1p**

c)  $T(t) = \left[ \sqrt{(t-3)^2 + 72} \right] \geq \left[ \sqrt{72} \right] = 8$  ..... **1p**

d)  $(t-3)^2$  are valoare maximă în  $t = 10$  ..... **1p**

deci  $T(10) = \left[ \sqrt{121} \right] = 11$  grade este temperatura maximă atinsă ..... **1p**

e) Când  $t \in [0; 10]$  se obține  $(t-3)^2 < 49$  ..... **1p**

și atunci  $T(t) = \left[ \sqrt{(t-3)^2 + 72} \right] < \left[ \sqrt{121} \right] = 11$ , deci  $T(t) \leq 10$  ..... **1p**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREME DE CORECTARE CLASA a XI-a**

**1.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) / A \cdot X = X \cdot A\}$

a) Calculați  $A^2$  și  $A^3$ ;

b) Arătați că matricele din  $C(A)$  sunt de forma  $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$ ;

b) Arătați că ecuația  $X^3 = O_3$  are o infinitate de soluții în  $M_3(\mathbb{C})$ ;

c) Arătați că ecuația  $X^3 = A$  nu are soluții în  $M_3(\mathbb{C})$ .

**Soluție:**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$  ..... **1p**

b)  $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \end{pmatrix}$  ..... **1p**

c)  $X \cdot A = \begin{pmatrix} b+2c & c & 0 \\ e+2f & f & 0 \\ h+2i & i & 0 \end{pmatrix}$  și prin identificare  $X$  este de forma  $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$  ..... **1p**

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$  sunt soluții..... **2p**

d)  $X^4 = A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \Rightarrow X^3 = A \Rightarrow a^3 = 0$  și  $3a^2b = 1$  (Fals) ..... **2p**

**2.** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  încât  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a - b}}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$

**Soluție :**

$f(x) = \sqrt{x^2 + x + a - b}$ ,  $g(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f(1) = \sqrt{a + 2} - b$  ..... **1p**

$g(1) = 0$  ..... **1p**

pentru ca limita să fie finită în mod necesar  $\sqrt{a + 2} - b = 0$  ..... **1p**

$\Rightarrow a = b^2 - 2$  ..... **1p**

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + b^2 - 2} - b}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{x^2 + x + b^2 - 2} + b)}$  ..... **1p**

dar  $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$  și  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$  ..... **1p**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

limita devine  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x+3)(\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b)} = \frac{3}{16} \Rightarrow b=2, a=2 \dots\dots\dots 1p$

**3.** Fie matricele de forma  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}, A \in M_3(\mathbb{R})$ .

- a) Calculați  $\det A$ ;
- b) Arătați că există matrice  $A$  de această formă, cu  $\det A = 0$  și care are elementele nesituate pe diagonala principală egale cu 2011 sau  $-2011$ ;
- c) Arătați că există matrice  $A$  de această formă, cu  $\det A = 0$  și care are elementele nesituate pe diagonala principală numere întregi nenule și distincte două câte două.
- d) La următorul joc se folosesc tablouri matriceale de forma din figură și doi participanți completează pe rând cele șase căsuțe libere, scriind într-o căsuță liberă, câte un număr întreg

nenul.  $\begin{pmatrix} 0 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & 0 \end{pmatrix}$

Câștigă cel care începe jocul dacă determinantul matricei obținută este diferit de zero, respectiv câștigă celălalt participant dacă determinantul este egal cu zero. Descoperiți o strategie prin care al doilea jucător să câștige jocul indiferent de cum joacă primul jucător.

**Soluție:**

a)  $\det A = a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \dots\dots\dots 1p$

b) Spre exemplu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2011 & -2011 \\ 2011 & 0 & 2011 \\ 2011 & 2011 & 0 \end{pmatrix}$  are  $\det A = 0 \dots\dots\dots 1p$

c)  $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} = 0 \Rightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = -a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \dots\dots\dots 1p$

spre exemplu, pot alege  $a_{12} = 1, a_{23} = 2, a_{31} = 3, a_{21} = -1, a_{32} = -2, a_{13} = -3 \dots\dots\dots 1p$

și  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  are  $\det A = 0 \dots\dots\dots 1p$

d) O strategie care face să câștige al doilea jucător este ca matricea  $A$  să aibă  $a_{ij} = -a_{ji} \dots\dots\dots 1p$

Așadar este suficient ca al doilea jucător să aleagă de fiecare dată, simetricul față de diagonala principală a numărului opus celui ales de primul jucător. .... **1p**

**4.** O piesă a unui angrenaj are forma unui patrulater ale cărui vârfuri într-un reper cartezian ortogonal sunt punctele  $A(2;2), B(9;1), C(14;6)$  și  $D(1;5)$  iar unitatea de lungime în reper de  $1 \text{ cm}$ . Se cere:

- a) Determinați coordonatele mijlocului  $M$  al diagonalei  $BD$ ;
- b) Demonstrați că  $M$  este chiar intersecția diagonalelor patrulaterului ( $A, M, C$ -coliniare);
- c) Determinați aria patrulaterului;
- d) Dacă trei dintre vârfurile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram interior plăcii, aflați aria acestui paralelogram;

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**Soluție:**

- Reprezintă în reperul cartezian punctele A, B, C, D ..... 1p
- a) Găsește  $M(5; 3)$  ..... 1p
- b) Verifică coliniaritatea punctelor A, M, C..... 1p
- c) Calculează aria unui triunghi format de trei dintre vârfurile patrulaterului  
(  $A_{ABC} = 20 \text{ cm}^2$ ;  $A_{ADC} = 20 \text{ cm}^2$ ;  $A_{ADB} = 10 \text{ cm}^2$ ;  $A_{CDB} = 30 \text{ cm}^2$  ) ..... 1p
- Calculează aria triunghiului rămas și determină  $A_p = 40 \text{ cm}^2$  ..... 1p
- d) Determină al patrulea vârf  $P(8;4)$  ..... 1p
- Apoi calculează aria acestui paralelogram (  $20 \text{ cm}^2$  ) ..... 1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a XII-a**

**1.** Pe mulțimea numerelor reale, se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

a) Demonstrați că  $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

b) Demonstrați că legea este asociativă și că  $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ;

c) Demonstrați că mulțimea  $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbb{R}$  față de legea „ $\circ$ ” și că  $(G; \circ)$  este grup comutativ;

d) Rezolvați ecuația  $x \circ x \circ x \circ x = 2011^7 + 1, x \in \mathbb{R}$ .

**Soluție:**

a) Verifică  $2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1 = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$  ..... **1p**

b) Folosind eventual punctul a) se justifică imediat  $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1$  ..... **1p**

c) Dacă  $x \neq 1$  și  $y \neq 1$  atunci  $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1 \neq 1$ , deci  $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  este parte stabilă în mulțimea numerelor reale față de operația ” $\circ$ ” ..... **1p**

Folosind eventual punctul b) se arată că  $(G; \circ)$  este structură comutativă și asociativă ..... **1p**

cu element neutru  $e = \frac{2012}{2011}$  ..... **1p**

și fiecare  $x \in G$  este simetrizabil, cu simetricul  $x' = \frac{1}{2011^2(x-1)} + 1 \in G$  ..... **1p**

d) Din subpunctele a) și b) se deduce  $x \circ y \circ z \circ t = 2011^3 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) \cdot (t-1) + 1$

și ecuația devine  $2011^3 \cdot (x-1)^4 + 1 = 2011^7 + 1$ , din care  $(x-1)^4 = 2011^4$ , deci  $x-1 = \pm 2011$

și ecuația are mulțimea soluțiilor  $S = \{-2010; 2012\}$  ..... **1p**

**2.** Demonstrați că:

a)  $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$ , oricare ar fi  $x \in [0; 1]$ ;

b)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$  și, folosind eventual a), deduceți că:  $\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{5}{6}$ ;

c)  $\frac{455}{528} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \leq \frac{61}{66}$ .

**Soluție:**

a)  $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow -x^4 \leq 0$  ..... **1p**

$\frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^3$  ..... **1p**

b)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2$  ..... **1p**



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

din a) rezultă  $\int_0^1 (1-x+x^2-x^3) dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \leq \int_0^1 (1-x+x^2) dx$  ..... 1p

deci  $\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{5}{6}$  ..... 1p

c) din a), înlocuind pe  $x$  cu  $x^5$  obținem  $1-x^5+x^{10}-x^{15} \leq \frac{1}{1+x^5} \leq 1-x^5+x^{10}$  ..... 1p

Rezultă  $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \leq 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11} \Leftrightarrow \frac{455}{528} \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \leq \frac{61}{66}$  ..... 1p

3. Fie funcțiile  $f$ ,  $g$  și  $h$  definite prin:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ ;  $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$  și

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in (-\infty; 1) \\ g(x), & \text{dacă } x \in [1; +\infty) \end{cases}$$

a) Justificați că funcțiile  $f$ ,  $g$ ,  $h$  sunt primitivabile și calculați  $\int f(x) dx$ ,  $\int g(x) dx$ ,  $\int h(x) dx$ ;

b) Justificați că funcția  $h$  este integrabilă pe  $[0; e]$  și calculați  $\int_0^e h(x) dx$ .

**Soluție:**

a) Funcțiile  $f$  și  $g$ , fiind elementare, sunt continue pe domeniul lor, deci sunt primitivabile ..... 1p

$$\int f(x) dx = \int (x-1)e^{-x} dx \text{ și se determină aplicând integrare prin părți } \left. \begin{matrix} u = x-1 \\ v' = e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{matrix} \right. \text{ și}$$

$$\int f(x) dx = \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$
 ..... 1p

$$\Rightarrow \int f(x) dx = (1-x) \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = (1-x) \cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -x \cdot e^{-x} + C = -\frac{x}{e^x} + C, C \in \mathbb{R}$$
 ..... 1p

$$\int g(x) dx = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$
 ..... 1p

Funcția  $h$  este primitivabilă deoarece  $h_s(1) = h_d(1) = h(1)$  și în rest  $h$  este continuă, deci continuă

$$\text{pe } \mathbb{R} \text{ și atunci } \int h(x) dx \text{ conține funcțiile } H(x) = \begin{cases} F(x) + C_1, & \text{dacă } x \in (-\infty; 1) \\ G(x) + C_2, & \text{dacă } x \in [1; +\infty) \end{cases} \text{ unde } F(x) = -\frac{x}{e^x}$$

și  $G(x) = \frac{\ln^3 x}{3}$  iar constantele  $C_1$  și  $C_2$  sunt în condiția de derivabilitate pentru  $H(x)$ , adică

$$-\frac{1}{e} + C_1 = C_2; H(x) = \begin{cases} -xe^{-x} + C, & \text{dacă } x \in (-\infty; 1) \\ \frac{1}{3} \ln^3 x - \frac{1}{e} + C, & \text{dacă } x \in [1; +\infty) \end{cases}$$
 ..... 1p

b) Deoarece  $h_s(1) = h_d(1) = h(1)$ , și în rest  $h$  este continuă,  $h$  este integrabilă pe  $[0; e]$  ..... 1p

$$\text{și } \int_0^e h(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e g(x) dx = \left( -\frac{x}{e^x} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{\ln^3 x}{3} \right) \Big|_1^e = \frac{1}{3} - \frac{1}{e}$$
 ..... 1p

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**4.** Un program de calculator, funcționează astfel:

La deschidere afișează pe ecranul monitorului 5 căsuțe ca în figura alăturată și solicită utilizatorului să scrie în fiecare din căsuțele  $n_1, n_2, n_3, n_4$  câte un număr real nenul.

După scrierea celor patru numere reale  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , în cea de a cincea căsuță programul afișează instantaneu rezultatul sumei

$S = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}$ . În continuare programul lucrează astfel:

La fiecare click succesiv din mouse în oricare două din căsuțele  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , în care să zicem că apar două numere  $a$  și  $b$ , aceste numere sunt înlocuite automat cu numerele  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$  și  $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$ , cu afișare în a cincea căsuță a noului rezultat al sumei  $S$ ;

Se cere să se demonstreze că:

a) Dacă  $a \cdot b \neq 0$  atunci  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$  și  $a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ ;

b) Dacă  $a \cdot b \neq 0$  atunci  $\frac{1}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ;

c) Dacă utilizatorul alege la pornire 4 numere și pe monitor apare  $S = 2011$  atunci în orice moment al acelei aplicări a programului suma  $S$  afișată pe monitor rămâne permanent 2011;

d) Dacă utilizatorul alege la pornire numerele 8044, 8045, 8046 și 8047, atunci în orice moment al acelei aplicări a programului nici unul din cele patru numere afișate nu va deveni 2011.

**Soluție:**

a)  $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a + b = -\sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a \cdot b = 0$  (fals) ..... **1p**

Analog  $a + b - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$  (fals) ..... **1p**

b)  $\frac{1}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a + 2b}{2ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  ..... **1p**

c) Inițial suma inverselor numerelor din  $M = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$  este  $S = 2011$ . Dacă la un anumit alt moment al aplicării programul afișează în căsuțele  $n_1, n_2, n_3, n_4$  patru numere  $a, b, c, d$  într-o ordine oarecare și cu suma  $S = 2011$  și dacă utilizatorul aplică click din mouse pe "a" și "b" atunci, conform cu punctul b), suma  $S$  rămâne tot 2011 ..... **1p**

d) În condiția alegerii inițiale a numerelor 8044, 8045, 8046 și 8047, în orice moment al utilizării programului pe ecran apare  $S = \frac{1}{8044} + \frac{1}{8045} + \frac{1}{8046} + \frac{1}{8047}$  ..... **1p**

$S < \frac{4}{8044} = \frac{1}{2011}$  ..... **1p**

deci nici unul din cele patru numere  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , care rămân pozitive, nu poate ajunge să fie 2011  
**1p**